Math. Ann. 289, 189–202 (1991)

Mathematische Annalen

Fonctions thêta du second ordre sur la jacobienne d'une courbe lisse

E. Izadi

Mathématiques, Université Paris-Sud, Bâtiment 425, F-91405 Orsay Cedex, France

Reçu le 17 octobre 1990

Introduction

Soit A une variété abélienne principalement polarisée de dimension $g \geqq 3$ sur $\mathbf{C}$, et soit Θ un diviseur thêta symétrique de A. Le système linéaire $|2\Theta|_{00}$ formé des diviseurs de $|2\Theta|$ qui ont une multiplicité supérieure ou égale à 4 à l'origine a été considéré par van Geemen et van der Geer en liaison avec le problème de Schottky [GG]. Notons $V(|2\Theta|_{00})$ le sous-schéma de A intersection des éléments de $|2\Theta|_{00}$. On conjecture que $V(|2\Theta|_{00})$ est concentré à l'origine si A n'est pas une jacobienne [GG], [D], [BD]. Si A est la jacobienne JC d'une courbe lisse C de genre $\neq 4$, Welters [W] a démontré que $V(|2\Theta|_{00})$ est égal ensemblistement à la surface $C-C$, image de $C \times C$ par le morphisme $(p,q) \mapsto \mathcal{O}_C(p-q)$ (si $g=4$, $V(|2\Theta|_{00})$ est réunion de $C-C$ et de deux points isolés). L'objet de la première partie de ce travail est de préciser ce résultat:

Théorème A. *Si C n'est pas hyperelliptique, la variété $V(|2\Theta|_{00})$ est lisse en dehors de l'origine.*

La sous-variété $V(|2\Theta|_{00}|$ est donc égale en dehors de l'origine à $C-C$ (si $g \neq 4$). Par contre on voit facilement qu'elle a un point immergé à l'origine dès que $g \geqq 4$ (2.9), donc qu'elle contient strictement la surface réduite $C-C$. D'autre part si C est hyperelliptique, $V(|2\Theta|_{00})$ n'est pas génériquement réduite (2.10).

Revenons à une variété Abélienne principalement polarisée (A, Θ) quelconque. La conjecture ci-dessus admet une version infinitésimale: en associant à tout élément de $|2\Theta|_{00}$ son cône tangent à l'origine, on définit une application linéaire projective de $|2\Theta|_{00}$ dans $|\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{g-1}}(4)|$. Son image est un système linéaire de quartiques dans $\mathbf{P}^{g-1}$. Notons $V_{\inf}(|2\Theta|_{00})$ l'intersection (schématique) de ces quartiques; on conjecture que cette intersection est vide lorsque (A, Θ) n'est pas une jacobienne [GG], [D], [BD]. Considérons maintenant la jacobienne (JC, Θ) d'une courbe lisse C, de genre $\geqq 3$; supposons comme ci-dessus que C n'est pas hyperelliptique, et identifions-la à son modèle canonique dans $\mathbf{P}^{g-1}$. Nous démontrons dans la seconde partie le résultat suivant:

Théorème B. a) *Si $g \neq 4$ ou si $g=4$ et C a deux g_3^1 distincts, la variété $V_{\mathrm{inf}}(|2\Theta|_{00})$ est égale à C.*

b) *Si $g=4$ et C a un unique g_3^1, la variété $V_{\mathrm{inf}}(|2\Theta|_{00})$ est lisse et égale à $C \cup \{s\}$, où s désigne le point singulier de la quadrique de $\mathbf{P}^3$ contenant C.*

Notations

On désigne par C une courbe lisse de genre $g \geqq 3$ sur $\mathbf{C}$.

On note W_d^r la sous-variété de $\mathrm{Pic}^d(C)$ qui paramètre les systèmes linéaires complets de dimension $\geqq r$; on pose $W_d = W_d^0$. La notation g_d^r désigne un élément quelconque de W_d^r. Rappelons que pour tout $\xi \in \mathrm{Pic}^{g-1}(C)$, le diviseur $W_{g-1} - \xi$ est un diviseur thêta de JC, et que le lieu singulier de W_{g-1} est W_{g-1}^1. On note $|K|$ le système canonique de C; pour $\xi \in \mathrm{Pic}^{g-1}(C)$, on pose $\xi' = K - \xi$.

Soit $\xi \in W_{g-1}^1$, tel que $h^0(\xi)=2$. Le cône tangent projectivisé à W_{g-1} en ξ est une quadrique de rang $\leqq 4$ dans $\mathbf{P}^{g-1}$, qui contient la courbe canonique [AM]; nous la noterons q_ξ. Les points de $\mathrm{Sing}(q_\xi) \cap C$ sont les points base des systèmes linéaires $|\xi|$ et $|\xi'|$ (loc. cit.). Si un point t de C n'est pas point base du système linéaire $|\xi|$, on note ξ_t l'unique diviseur de $|\xi|$ contenant t.

Pour tout sous-ensemble S d'un espace projectif, on désigne par $\langle S \rangle$ le sous-espace engendré par S.

Première partie

1. Cas général

On suppose que la courbe C n'est pas hyperelliptique, et on l'identifie à son modèle canonique. On fixe deux points distincts p, q de C; nous voulons prouver que la variété $V(|2\Theta|_{00})$ (cf. introduction) est lisse en $p-q$.

(1.1) **Proposition.** *Soit ξ un élément de W_{g-1}^1 tel que $h^0(\xi)=2$ et que p et q ne soient pas dans $\mathrm{Sing}(q_\xi)$. Alors $W_{g-1}-\xi$ et $W_{g-1}-\xi'$ sont lisses en $p-q$, et leurs espaces tangents projectivisés en $p-q$ découpent sur C les diviseurs $\xi_q+\xi'_p$ et $\xi'_q+\xi_p$ respectivement.*

Démonstration. La condition sur p et q entraîne que p n'est pas point fixe de ξ', d'où $h^0(\xi+p)=h^0(\xi)=2$, et que q n'est pas point fixe de ξ, d'où $h^0(\xi+p-q)=1$; ceci implique que $W_{g-1}-\xi$ est lisse en $p-q$, et que son espace tangent projectivisé en ce point est $\langle \xi_q - q + p \rangle$. L'unique diviseur canonique contenant $\xi_q - q + p$ est $\xi_q + \xi'_p$, donc $\langle \xi_q - q + p \rangle = \langle \xi_q + \xi'_p \rangle$. On voit de même que $W_{g-1} - \xi'$ est lisse en $p-q$, et que son espace tangent projectivisé en ce point est $\langle \xi'_q + \xi_p \rangle$.

Pour tout $\xi \in W_{g-1}^1$, notons θ_ξ une section de $\mathcal{O}_{JC}(W_{g-1}-\xi)$. Soit D un champ de vecteurs constant sur JC. La dérivée par rapport à ξ de la section $\theta_\xi \theta_{\xi'}$ de $\mathcal{O}(2\Theta)$ est encore une section de $\mathcal{O}(2\Theta)$, que l'on peut écrire $D\theta_\xi \cdot \theta_{\xi'} - \theta_\xi \cdot D\theta_{\xi'}$, dont la multiplicité à l'origine est $\geqq 4$ [BD].

(1.2) **Proposition.** *Soit $\xi \in W_{g-1}^1$.* a) *Supposons que $h^0(\xi)$ soit égal à 2, que la quadrique q_ξ soit de rang 4 et que son lieu singulier ne rencontre pas la droite $\langle p+q \rangle$. Alors les diviseurs d'équation $D\theta_\xi \cdot \theta_{\xi'} - \theta_\xi \cdot D\theta_{\xi'} = 0$ sont lisses en $p-q$ pour D assez général, et l'intersection de leurs espaces projectifs tangents est $\langle \xi_q + \xi'_p \rangle \cap \langle \xi_p + \xi'_q \rangle$.*

b) *Dans le cas contraire, tous ces diviseurs sont singuliers en $p-q$.*

Observons que si $h^0(\xi)=2$ et si p et q ne sont pas dans $\mathrm{Sing}(q_\xi)$, la condition $\langle p+q\rangle \cap \mathrm{Sing}(q_\xi) \neq \emptyset$ équivaut à dire que p et q on même projection depuis $\mathrm{Sing}(q_\xi)$, donc équivaut aux égalités $\xi_p=\xi_q$ et $\xi'_p=\xi'_q$.

Démonstration. Si V et V' désignent les équations des espaces tangents à $W_{g-1}-\xi$ et $W_{g-1}-\xi'$ en $p-q$, celle de l'espace tangent au diviseur de $D\theta_\xi \cdot \theta_{\xi'} - \theta_\xi \cdot D\theta_{\xi'}$ est $V' \cdot DV - V \cdot DV'$. Sous les hypothèses de b), les formes linéaires V et V' sont proportionnelles (cf. proposition 1.1), d'où la conclusion dans ce cas.

Montrons que sous l'hypothèse a), les hyperplans $\langle \xi_q+\xi'_p\rangle$ et $\langle \xi_p+\xi'_q\rangle$ sont distincts. Comme q_ξ est de rang 4, on a $\langle \xi_q\rangle \neq \langle \xi'_q\rangle$; si les hyperplans $\langle \xi_q+\xi'_p\rangle$ et $\langle \xi_p+\xi'_q\rangle$ étaient égaux, ils coïncideraient avec $\langle \xi_q+\xi'_q\rangle$, ce qui entraînerait $\xi_p=\xi_q$ et $\xi'_p=\xi'_q$, contrairement à l'hypothèse. Ainsi les formes V et V' sont linéairement indépendantes. On en déduit aussitôt que lorsque D décrit l'espace des champs de vecteurs constants sur JC, l'intersection des espaces $\{V'DV-VDV'=0\}$ a pour équation $V=V'=0$, d'où la proposition.

(1.3) *Remarque.* Sous les hypothèses de a), on a $\langle \xi_q+\xi'_p\rangle \cap \langle \xi_p+\xi'_q\rangle = \mathrm{Sing}(q_\xi) \oplus \langle p+q\rangle$. En effet l'inclusion $\mathrm{Sing}(q_\xi) \oplus \langle p+q\rangle \subset \langle \xi_q+\xi'_p\rangle \cap \langle \xi_p+\xi'_q\rangle$ est claire, et les deux espaces ont même dimension.

(1.4) Nous noterons $(W^1_{g-1})_0$ l'ouvert de W^1_{g-1} formé des éléments ξ qui satisfont aux conditions de a). Observons que cet ouvert est *non vide* lorsque C n'est pas trigonale: en effet, il résulte de la description des composantes de W^1_{g-1} donnée dans [T] qu'un point générique ξ de W^1_{g-1} vérifie $h^0(\xi)=2$ et $\mathrm{rg}(q_\xi)=4$. De plus, on ne peut avoir $\mathrm{Sing}(q_\xi) \cap \langle p+q\rangle \neq \emptyset$ pour tout $\xi \in W^1_{g-1}$: cette condition implique en effet que la quadrique q_ξ contient la droite $\langle p+q\rangle$ puisqu'elle la rencontre en trois points (comptés avec multiplicités); or les quadriques q_ξ engendrent l'espace des quadriques contenant la courbe canonique [G], et celles-ci ne peuvent toutes contenir une droite.

Il résulte de la proposition 1.2 que l'espace tangent (projectivisé) à $V(|2\Theta|_{00})$ en $p-q$ est contenu dans l'intersection des hyperplans $\langle \xi_q+\xi'_p\rangle$ pour $\xi \in (W^1_{g-1})_0$. Le théorème A résulte donc de l'assertion suivante [pour tout couple (p,q) de points distincts de C]:

(A') *L'intersection des hyperplans* $\langle \xi_q+\xi'_p\rangle$ *pour* $\xi \in (W^1_{g-1})_0$ *est égale à la droite* $\langle p+q\rangle$.

Comme cette intersection contient évidemment $\langle p+q\rangle$, il suffit d'ailleurs de prouver qu'elle est de dimension $\leqq 1$.

(1.5) **Proposition.** *Supposons que C n'est pas trigonale. Pour tout élément fixé t de C,* $p+q+t$ *ne peut être contenu dans* $\xi_q+\xi'_p$ *pour tout* $\xi \in W^1_{g-1}$.

Démonstration. Sinon on aurait, pour tout ξ appartenant à $W^1_{g-1}-W^2_{g-1}$,
- ou bien $t \in \xi'_p$, ce qui implique que q_ξ contient la droite $\langle p+t\rangle$;
- ou bien $t \in \xi_q$, ce qui implique que q_ξ contient la droite $\langle q+t\rangle$.

Dans chaque cas ceci contredirait comme ci-dessus le Théorème de Green.

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que C est de genre $\geqq 6$ *et n'est ni trigonale, ni bielliptique, ni isomorphe à une quintique plane lisse.* Sous ces conditions W^1_{g-1} est irréductible [T], de sorte que l'ouvert $(W^1_{g-1})_0$ est *dense* dans W^1_{g-1}.

(1.6) **Proposition.** *Si C est de genre* $\geqq 7$, *l'assertion* (A') *est vraie.*

(1.7) *Démonstration.* Remarquons que les hyperplans $\langle \xi_q + \xi'_p \rangle$ forment une famille de dimension $g-4$, de sorte que la dimension de leur intersection est au plus 2. Supposons que cette intersection soit un 2-plan P. Par (1.5) on peut supposer que P ne contient pas d'autre point de C que p et q. Considérons la projection ϱ de centre P sur $\mathbf{P}^{g-4}$. Soit $\pi = \varrho|_C$.

(1.8) Supposons d'abord que le morphisme π est birationnel sur son image. Un hyperplan générique H de $\mathbf{P}^{g-4}$ vérifie:

$$\pi^{-1}(H) \cap C = p + q + \sum_{1 \leqq i \leqq g-2} p_i + \sum_{1 \leqq i \leqq g-2} q_i$$

avec

$$\left| p + \sum_{1 \leqq i \leqq g-2} p_i \right| \in W^1_{g-1} \quad \text{et} \quad \left| q + \sum_{1 \leqq i \leqq g-2} q_i \right| \in W^1_{g-1}.$$

Soit U l'ouvert de $(\mathbf{P}^{g-4})^*$ formé des hyperplans transverses à $\pi(C)$ et la rencontrant en des points lisses. D'après [ACGH, chap. 3], la variété

$$I_{g-2} = \{(p_1, \ldots, p_{g-2}; H);\ H \in U,\ p_i \in H \cap \pi(C)\}$$

est irréductible; la sous-variété fermée

$$J_{pq} = \{(p_1, \ldots, p_{g-2}; H) \in I_{g-2},\ \pi^{-1}(\textstyle\sum p_i + p) \in W^1_{g-1}\}$$

est de dimension $g-4$, donc égale à I_{g-2}.

Soient $p_1, \ldots, p_{g-4}$ des points généraux de C; leurs images par π engendrent un hyperplan H de $\mathbf{P}^{g-4}$. Posons $\pi^* H - \sum p_k = q_1 + \ldots + q_g$. Alors quels que soient i, j distincts le diviseur $p + q_i + q_j + \sum p_k$ appartient d'après ce qui précède à W^1_{g-1}, donc engendre un sous-espace L de codimension 2 dans $\mathbf{P}^{g-1}$. On en déduit que tous les q_i appartiennent à L, d'où $h^0(K - \pi^* H - p) = h^0(q) = 2$, ce qui est absurde.

(1.9) Traitons le cas où π n'est pas birationnel. La courbe $\pi(C)$ est non dégénérée, donc son degré est supérieur ou égal à $g-4$. Si $\deg \pi \geqq 4$, on obtient $2g - 4 \geqq 4(g-4)$ soit $g \leqq 6$. Si $\deg \pi = 3$, on doit avoir $\deg \pi(C) \geqq g-3$ sans quoi C serait trigonale; on trouve alors $2g - 4 \geqq 3(g-3)$ soit $g \leqq 5$. Si $\deg \pi = 2$, la courbe $\pi(C)$ est de degré $g-2$, donc de genre géométrique $\leqq 2$ [ACGH, chap. 3]; comme C n'est pas hyperelliptique ni bielliptique, on conclut que l'image Γ de π est une courbe lisse de genre 2 et que π définit un revêtement double $\pi: C \to \Gamma$.

Notons δ l'élément de $\operatorname{Pic}(\Gamma)$ tel que $\pi_* \mathcal{O}_C \cong \mathcal{O}_\Gamma \oplus \mathcal{O}_\Gamma(-\delta)$. Pour tout diviseur D sur Γ, on a un isomorphisme

$$H^0(C, \pi^* D) \cong H^0(\Gamma, D) \oplus H^0(\Gamma, D - \delta); \tag{1.10}$$

d'autre part, on a $K \equiv \pi^*(K_\Gamma + \delta)$. Si H est un hyperplan de $\mathbf{P}^{g-4}$, on a $\pi^* H \equiv K - p - q$; compte tenu de (1.10), on en déduit que le diviseur $p + q$ provient de Γ, autrement dit qu'il existe un point r de Γ tel qu'on ait $p + q = \pi^* r$. Notons t le conjugué de r par l'involution hyperelliptique, et t_1, t_2 les points de C tels que $\pi^* t = t_1 + t_2$. On a $h^0(p + q + t_1 + t_2) = 2$ et $h^0(2p + 2q + t_1 + t_2) = 2$: cela résulte de (1.10) et des relations $\deg(\delta) = g - 3 \geqq 4$.

Notons X la sous-variété $p + q + t_1 + t_2 + W_{g-5}$ de W^1_{g-1}. Pour ξ générique dans X, on a $\xi'_p \neq \xi'_q$: en effet dans le cas contraire on aurait $h^0(K - 2p - 2q - t_1 - t_2 - E) \geqq 1$ pour tout élément E de W_{g-5}, d'où $h^0(2p + 2q + t_1 + t_2) \geqq 3$. On a donc $\langle p + q \rangle \cap \operatorname{Sing}(q_\xi) = \varnothing$ (1.2). Mais d'autre part on a $\xi_p = \xi_q$ pour tout $\xi \in X$, d'où $\langle \xi_q + \xi'_p \rangle \cap \langle \xi_p + \xi'_q \rangle = \langle \xi_p \rangle$. L'intersection des

$\langle\xi_q+\xi'_p\rangle$ pour $\xi\in(W^1_{g-1})_0$, est donc contenue dans l'intersection des $\langle\xi_p\rangle$ pour $\xi\in X$, qui n'est autre que le 2-plan $\langle p+q+t_1+t_2\rangle$. On conclut alors à l'aide de la proposition 1.5. C.Q.F.D.

(1.11) **Proposition.** *Si C est de genre* 6, *l'assertion* (A′) *est vraie.*

Procédons comme en (1.7); la projection de centre P définit un morphisme $\pi: C\to\mathbf{P}^2$. Si π est birationnel sur son image, on conclut comme en (1.8). Sinon, on voit comme en (1.9) que π est de degré 4 sur une conique ou de degré 2 sur une quartique.

(1.12) Supposons que π est de degré 4 sur une conique. Il existe alors un g^1_4 sur C tel que π soit défini par le système linéaire $2|g^1_4|$; pour tout $\xi\in W^1_5$, le diviseur $\xi_p+\xi'_q$ s'écrit donc $A+B+p+q$, avec $A,B\in g^1_4$.

Soient s,t des points généraux de C. Puisque W^1_5 est de dimension 2, il existe des points u,v de C tels que $h^0(s+t+u+v+p)=2$. Par suite le diviseur $s+t+u+v$ est contenu dans $(g^1_4)_s+(g^1_4)_t$; on voit facilement par Riemann-Roch que $u+v$ ne peut être contenu dans $(g^1_4)_t$. L'un des deux points u,v, par exemple u, est donc contenu dans $(g^1_4)_s$. On en déduit que u est fixe lorsque t varie, s restant fixé. Considérons alors le système linéaire $|K-p-s-u|$; il est de degré 7, et sans point base pour s assez général. Mais le morphisme de C dans $\mathbf{P}^2$ qu'il définit est de degré $\geqq 2$ sur son image d'après ce qui précède, ce qui conduit à une contradiction.

(1.13) Supposons que π est de degré 2 sur une quartique; notons i l'involution de C correspondante. Soit ξ un élément générique de W^1_5; par hypothèse il existe $A\in C^{(4)}$ tel qu'on ait $\xi_p+\xi'_q=p+q+A+i(A)$.

Observons que ξ_p ne contient pas de diviseur de la forme $s+is$; sinon il existerait, pour un point général s de C, un famille de dimension un de g^1_5 contenant $p+s+is$; le morphisme défini par le système linéaire $|K-p-s-is|$ serait de degré $\geqq 2$ sur son image, d'où comme ci-dessus une contradiction.

Par suite on peut choisir A de façon que $\xi_p=p+A$, $\xi'_q=q+i(A)$. Il en résulte qu'on a $\xi+i(\xi)\equiv K+p-iq$ pour ξ générique dans W^1_5, donc pour tout $\xi\in W^1_5$. En prenant ξ de la forme $\eta+t$, où η est un g^1_4 sur C et t un point variable de C, on aboutit à une contradiction.

2. Cas particuliers

a) C bielliptique $(g\geqq 6)$

(2.1) On suppose que C est de genre $\geqq 6$ et bielliptique, c'est-à-dire admet un morphisme de degré deux $\pi: C\to E$ sur une courbe elliptique E. On note $i: C\to C$ l'involution qui échange les deux feuillets du revêtement π. On a $K_C\equiv\pi^*\delta$, où δ est l'élément de $\mathrm{Pic}(E)$ tel que $\pi_*\mathcal{O}_C\cong\mathcal{O}_E\oplus\mathcal{O}_E(-\delta)$.

Rappelons [W] que W^1_{g-1} possède alors deux composantes X_1 et X_2: les éléments de X_1 sont de la forme $\pi^*\alpha+D_{g-5}$, où α est un g^1_2 sur E et D_{g-5} un élément de W_{g-5}. Ceux de X_2 sont les éléments ξ de W^1_{g-1} tels que $\pi_*\xi\equiv\delta$.

(2.2) **Proposition.** *Si $ip\neq q$, l'assertion* (A′) *est satisfaite.*

Il est clair qu'un élément générique de X_1 appartient à $(W^1_{g-1})_0$; montrons qu'il en est de même de X_2. Sinon tous les hyperplans $\langle\xi_p+\xi'_p\rangle$, pour $\xi\in X_2$, contiennent $\langle 2p+2q\rangle$; comme ils forment une famille de dimension $g-4$, leur intersection est au plus un plan, ce qui implique $h^0(2p+2q)=2$. Or les sections de $\mathcal{O}_C(2p+2q)$ peuvent être identifiées à celles de $\mathcal{O}_C(\pi^*(2\pi(p)+2\pi(q))$ qui s'annulent sur $2ip+2iq$. Comme $g(C)\geqq 6$ on a d'après (1.10) $|\pi^*(2\pi(p)+2\pi(q)|=\pi^*|2\pi(p)+2\pi(q)|$ et par suite $h^0(2p+2q)=1$, d'où une contradiction.

Pour $\xi\in X_1$, les hyperplans $\langle \xi_p+\xi'_q\rangle$ contiennent le 2-plan $\langle p+q+ip+iq\rangle$; pour la même raison de dimension que ci-dessus, on a

$$\bigcap_{\xi\in X_1}\langle \xi_p+\xi'_q\rangle=\langle p+q+ip+iq\rangle .$$

Compte tenu de la proposition 1.5, l'intersection des $\langle \xi_p+\xi'_q\rangle$ pour $\xi\in(W^1_{g-1})_0$ doit être strictement contenue dans $\langle p+q+ip+iq\rangle$, donc égale à $\langle p+q\rangle$.

Dans le cas $ip=q$, l'assertion (A') résulte [en vertu de la remarque (1.3)] de l'énoncé un peu plus général suivant:

(2.3) **Proposition.** *Soit p un point quelconque de C. Pour tout $\xi\in X_2-(X_1\cap X_2)$, $\mathrm{Sing}(q_\xi)$ ne rencontre pas $\langle p+ip\rangle$; on a*

$$\bigcap_{\xi\in X_2-(X_1\cap X_2)}(\mathrm{Sing}(q_\xi)\oplus\langle p+ip\rangle)=\langle p+ip\rangle .$$

(2.3.1) *Démonstration.* Si $\langle p+ip\rangle$ rencontre $\mathrm{Sing}(q_\xi)$, on a en particulier $\xi_p=p+ip+\dots$, ce qui d'après [W, par. 3, (3.4)] entraîne $\xi\in X_1$.

(2.3.2) L'involution i agit sur $|K|^*$ et possède un point fixe isolé F et un hyperplan H de points fixes qui correspondent aux sous-espaces propres de i agissant sur $H^0(C,K)^*$ pour les valeurs propres 1 et -1 respectivement. Pour tout $t\in C$, la droite $\langle t+it\rangle$ passe par F.

Soit $\xi\in X_2$. On a $\xi'=i^*\xi$ [W]; la quadrique q_ξ est donc globalement invariante par i, et il en est de même de $\mathrm{Sing}(q_\xi)$. Si de plus $\xi\notin X_1$, $\mathrm{Sing}(q_\xi)$ ne rencontre pas $\langle p+ip\rangle$ et par suite ne contient pas F, donc il est contenu dans H.

(2.3.3) Supposons que l'intersection considérée soit un 2-plan P. Il est invariant par i comme intersection de sous-espaces invariants, et contient F. Son intersection avec H est une droite L; pour tout $\xi\in X_2-(X_1\cap X_2)$, $\mathrm{Sing}(q_\xi)$ est un hyperplan dans $(\mathrm{Sing}(q_\xi)\oplus\langle p+ip\rangle)\cap H$, donc rencontre L. On a par conséquent $\mathrm{Sg}(q_\xi)\cap L\neq\emptyset$ pour tout $\xi\in X_2$.

(2.3.4) Soient $p_1,\dots,p_{g-5}$ des points distincts de C, tels que $\{p_1,\dots,p_{g-5}\}\cap\{ip_1,\dots,ip_{g-5}\}=\emptyset$. Pour $s\in E$, posons $\xi(s)=\pi^*(s+\pi(p))+\sum p_i$. On a $\xi(s)\in X_1$, et $\xi(s)\in X_2$ si et seulement si $\pi_*\xi(s)\equiv\delta$. Il existe donc 4 points s de E tels que $\xi(s)\in X_1\cap X_2$. Pour $\xi=\xi(s)$ possédant cette propriété, on a $\mathrm{Sing}(q_\xi)\supset\langle\sum(p_i+ip_i)\rangle$ et $\xi_p=\pi^*(s+\pi(p))+\sum p_i$, $\xi'_{ip}=\pi^*(s+\pi(p))+\sum ip_i$. Si ξ et ζ sont deux tels éléments (distincts), les hyperplans $\langle\xi_p+\xi'_{ip}\rangle$ et $\langle\zeta_p+\zeta'_{ip}\rangle$ sont distincts, et leur intersection est donc égale à $\langle\sum(p_i+ip_i)+2(p+ip)\rangle$. Comme les points p_i sont arbitraires, on en déduit que l'intersection des $\langle\xi_p+\xi'_{ip}\rangle$ pour $\xi\in X_1\cap X_2$ est égale à $\langle 2(p+ip)\rangle$.

(2.3.5) Prenons désormais $\xi\in X_1\cap X_2$. $\mathrm{Sing}(q_\xi)$ rencontre L (2.3.3) et contient F $\left(\text{car il rencontre } C \text{ en un diviseur de la forme } \sum_{1\leqq i\leqq g-5}(p_i+ip_i)\right)$, donc son intersection avec P est une droite, distincte en général de $\langle p+ip\rangle$. Il en résulte que pour des p_i génériques, $\langle\xi_p\rangle$ contient P puisqu'il le rencontre en deux droites distinctes. Ainsi P est contenu dans les hyperplans $\langle\xi_p+\xi'_{ip}\rangle$ pour $\xi\in X_1\cap X_2$, donc dans leur intersection: on doit avoir $P=\langle 2(p+ip)\rangle\subset\langle\xi_p\rangle$. Or d'après (2.3.4), cela n'est pas vérifié pour un choix générique de ξ. C.Q.F.D.

b) C trigonale $(g \geqq 5)$

On sait alors que W^1_{g-1} possède exactement deux composantes irréductibles qui sont $X = W_{g-4} + g^1_3$ et $K - X$.

(2.4) **Proposition.** *L'assertion* (A′) *est satisfaite.*

Soient D_{g-4} un élément général de W_{g-4}, et $\xi = g^1_3 + D_{g-4}$. On a alors $\mathrm{Sing}(q_\xi) = \langle D_{g-4} \rangle$; comme $h^0(D_{g-4} + p + q) = 1$, $\mathrm{Sing}(q_\xi)$ ne rencontre pas la droite $\langle p+q \rangle$, et on a $\mathrm{Sing}\, q_\xi \oplus \langle p+q \rangle = \langle p+q+D_{g-4} \rangle$. Lorsque D_{g-4} varie, l'intersection des sous-espaces $\langle p+q+D_{g-4} \rangle$ est réduite à $\langle p+q \rangle$, d'où la proposition.

c) Quintique plane

(2.5) **Proposition.** *Supposons que C soit isomorphe à une quintique plane (lisse). L'assertion* (A′) *est satisfaite.*

Soit $\xi \in W^1_5$; il existe $t, t' \in C$ tels que $\xi = g^2_5 - t' + t$. Supposons $t \neq t'$; on a $\mathrm{Sing}(q_\xi) = \langle t + t' \rangle$. Pour t, t' généraux on a donc $\mathrm{Sing}(q_\xi) \cap \langle p+q \rangle = \emptyset$, et $\mathrm{Sing}(q_\xi) \oplus \langle p+q \rangle = \langle p+q+t+t' \rangle$. La proposition en résulte.

d) $g=5$

(2.6) **Proposition.** *Lorsque* $g=5$, *l'assertion* (A′) *est satisfaite.*

Il suffit de traiter le cas où la courbe C n'est pas trigonale. Compte tenu de la Remarque (1.3), il s'agit de prouver que les 2-plans $\mathrm{Sing}(q_\xi) \oplus \langle p+q \rangle$, pour $\xi \in (W^1_{g-1})_0$, ne sont pas tous égaux à un même plan P. Si c'était le cas, les sommets des cônes q_ξ pour $\xi \in W^1_{g-1}$ seraient tous contenus dans P, ce qui contredirait le lemme 6.12 de [B3].

e) $g=4$

(2.7) **Proposition.** *Lorsque* $g=4$ *et* $2g^1_3 \equiv K$, *le théorème A est vrai.*

Démonstration. Soit D_0 un champ de vecteurs constant sur JC tel que l'image de $D_0(0)$ dans $\mathbb{P}(T_0(JC)) \cong \mathbb{P}^3$ soit le sommet du cône quadratique contenant C.

Soit θ une équation de $W_3 - g^1_3$. On sait [BD] que les diviseurs de θ^2 et de $\theta \cdot DD_0\theta - D\theta \cdot D_0\theta$ (pour D champ de vecteurs constant sur JC) engendrent le système linéaire $|2\Theta|_{00}$. Écrivons le développement de θ au voisinage de $p-q$:

$$\theta = V + B + \ldots \quad V \text{ et } B \text{ étant des polynômes homogènes de degrés 1 et 2.}$$

L'équation de l'espace tangent à $\theta \cdot DD_0\theta - D\theta \cdot D_0\theta$ en $p-q$ est $V \cdot DD_0B - DV \cdot D_0B$. L'intersection de ces sous-espaces lorsque D varie est de dimension projective 1 si et seulement si V et D_0B sont linéairement indépendants, c'est-à-dire s'il existe un diviseur de $|2\Theta|_{00}$ lisse en $p-q$.

Considérons le morphisme $\alpha: C^{(3)} \to W_3 - g^1_3$ qui à $D_3 \in C^{(3)}$ associe $D_3 - g^1_3$. Pour tout hyperplan Λ de $|K|$, on définit [W] un diviseur E_Λ sur $C^{(3)}$ formé des $D \in C^{(3)}$ tels que le sous-système $|K-D|$ de $|K|$ rencontre Λ. Lorsque Λ varie, les diviseurs E_Λ décrivent un système linéaire $|E_{|K|}|$ sur $C^{(3)}$. On a $\alpha^* \mathcal{O}_{JC}(2\Theta)$

$\cong \mathcal{O}_{C^{(3)}}(2E_{|K|})$; l'application $\alpha^*: H^0(\mathcal{O}_{JC}(2\Theta)) \to H^0(\mathcal{O}_{C^{(3)}}(2E_{|K|}))$ est surjective, et un diviseur de $|2E_{|K|}|$ provient d'un diviseur de $|2\Theta|_{00}$ si et seulement s'il contient $S = \alpha^{-1}(C-C)$.

Le lieu fixe de $|E_{|K|}|$ est $\alpha^{-1}(0)$, c'est-à-dire $|g_3^1|$; comme $p-q$ est non nul, $\alpha^{-1}(p-q)$ est réduit à un point, et on peut trouver un diviseur $E \in |E_{|K|}|$ qui ne contient pas ce point. De plus la surface S est un élément de $|E_{|K|}|$ (on a $S = E_\Lambda$, où Λ désigne le sous-système $2|g_3^1|$ *de* $|K|$). Le diviseur $S + E$ appartient à $|2E_{|K|}|$ et est lisse au point $\alpha^{-1}(p-q)$ car S l'est. Ainsi tout diviseur $D \in |2\Theta|_{00}$ vérifiant $\alpha^*(S+E) = D$ est lisse en $p-q$, ce qui achève de prouver la proposition.

(2.8) **Proposition.** *Lorsque $g=4$ et C admet deux g_3^1 distincts, le Théorème A est vrai.*

Notons ξ et ξ' les deux g_3^1. Si $p-q$ est un point non nul de $C-C$, les 2-plans $\langle \xi_q + \xi'_p \rangle$ et $\langle \xi_p + \xi'_q \rangle$ sont distincts, ce qui suffit à entraîner l'assertion (A'), et donc la lissité de $V(|2\Theta|_{00})$ en $p-q$.

Le système linéaire $|2\Theta|_{00}$ est engendrée par les diviseurs des sections $D\theta_\xi \cdot \theta_{\xi'} - \theta_\xi \cdot D\theta_{\xi'}$ pour D variable [BD]. Posons $a = \xi' - \xi$. On vérifie aussitôt qu'on a $h^0(2\xi' - \xi) = 0$, et par suite $\theta_{\xi'}(a) \neq 0$; le développement en série de θ_ξ au voisinage de a s'écrit $\theta_\xi = q + (\text{termes de degré } \geqq 3)$, où q est une équation de la quadrique contenant C. L'espace tangent au diviseur de $D\theta_\xi \cdot \theta_{\xi'} - \theta_\xi \cdot D\theta_{\xi'}$ en a est donc l'hyperplan $Dq = 0$. Comme q est de rang 4, on en déduit que $V(|2\Theta|_{00})$ est lisse en a, et aussi en $-a$ par symétrie. Cela achève la démonstration du théorème A dans ce cas.

f) $g=3$

Rappelons brièvement le cas $g=3$ [GG]: le système $|2\Theta|_{00}$ contient un seul diviseur Δ isomorphe à $C-C$ (et donc lisse en dehors de l'origine).

La démonstration du Théorème A est ainsi achevée.

g) Remarques

(2.9) Dès que $g \geqq 4$, la variété $V(|2\Theta|_{00})$ admet un *point immergé* en 0 (et ne coïncide donc pas avec la surface $C-C$). Notons en effet $\mathcal{O}$ l'anneau local de JC à l'origine, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, et $\mathcal{J}$ l'idéal du germe de $V(|2\Theta|_{00})$ en 0; on a par construction $\mathcal{J} \subset \mathfrak{m}^4$. Soit ξ un élément de $W_{g-1}^1 - W_{g-1}^2$. La section θ_ξ s'annule sur $C-C$, et définit donc un élément de $\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{m}^3$ dont une puissance appartient à $\mathcal{J}$, ce qui prouve que l'anneau $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ n'est pas réduit.

(2.10) Disons un mot sur le cas hyperelliptique. La sous-variété $C-C$ est alors égale à $W_2 - g_2^1$; sa classe de cohomologie est la classe minimale $\frac{\Theta^{g-2}}{(g-2)!}$, alors que la classe de $C-C$ dans le cas non hyperelliptique est $2\frac{\Theta^{g-2}}{(g-2)!}$. Lorsque la courbe C varie, les sous-variétés $V(|2\Theta|_{00})$ forment une famille continue de cycles, de sorte que la classe de $V(|2\Theta|_{00})$ est toujours égale à $2\frac{\Theta^{g-2}}{(g-2)!}$. Il ne résulte que cette sous-variété n'est pas génériquement réduite lorsque C est hyperelliptique (plus précisément, sa multiplicité au point générique est 2).

Deuxième partie

3. Préliminaires

(3.1) On désigne toujours par C une courbe de genre $g \geqq 4$. Soit ξ un point double de W_{g-1} et soit θ_ξ une section non nulle de $\mathcal{O}_{JC}(W_{g-1}-\xi)$. Ecrivons le développement de θ_ξ en 0: $\theta_\xi = q_\xi + f_\xi + \dots$ où q_ξ et f_ξ sont des polynômes de degrés 2 et 3 respectivement. Nous conviendrons de désigner par le même symbole un polynôme homogène et son lieu des zéros dans $|K|^*$.

Soit D un champ de vecteurs constant sur JC. Les cônes tangents en 0 aux diviseurs de $\theta_\xi \cdot \theta_{\xi'}$ et $D\theta_\xi \cdot \theta_{\xi'} - \theta_\xi \cdot D\theta_{\xi'}$ sont respectivement $(q_\xi)^2$ et $f_\xi \cdot Dq_\xi - q_\xi \cdot Df_\xi$. Ensemblistement l'intersection de ces quartiques est contenue dans l'intersection des quadriques contenant C. Nous allons prouver qu'elle est égale à C dans le cas a) du Théorème B (cf. introduction), et à $C \cup \{s\}$ dans le cas b): cela entraînera le Théorème B.

Fixons un point p de C; notons $T_p(q_\xi)$ et $T_p(f_\xi)$ les espaces projectifs tangents à q_ξ et f_ξ en p. L'espace tangent en p à la quartique $f_\xi \cdot Dq_\xi - q_\xi \cdot Df_\xi$ s'écrit $T_{p,D} = Dq_\xi(p) \cdot T_p(f_\xi) - Df_\xi(p) \cdot T_p(q_\xi)$.

(3.2) **Lemme.** *Si $T_p(q_\xi) \cap T_p(f_\xi)$ est de codimension 2, on a*

$$\bigcap_D T_{p,D} = T_p(q_\xi) \cap T_p(f_\xi) = \operatorname{Sing}(q_\xi) \oplus \langle 2p \rangle .$$

Démonstration. Pour prouver la première égalité, il suffit de montrer qu'il existe deux hyperplans $T_{p,D}$ et $T_{p,D'}$ distincts. Dans le cas contraire, pour tous D, D' dans $T_0(JC)$, il existe des scalaires λ, μ non tous deux nuls tels qu'on ait

$$\lambda(Dq_\xi(p) \cdot T_p(f_\xi) - Df_\xi(p) \cdot T_p(q_\xi)) + \mu(D'q_\xi(p) \cdot T_p(f_\xi) - D'f_\xi(p) \cdot T_p(q_\xi)) = 0 ,$$

ce qui entraîne $(\lambda D + \mu D')q_\xi(p) = (\lambda D + \mu D')f_\xi(p) = 0$. Autrement dit la droite $\langle D, D' \rangle$ rencontre $T_p(q_\xi) \cap T_p(f_\xi)$, ce qui contredit l'hypothèse que cette intersection est de codimension 2.

Il est clair qu'on a $\langle 2p \rangle \subset T_p(q_\xi) \cap T_p(f_\xi)$ et $\operatorname{Sing}(q_\xi) \subset T_p(q_\xi)$; l'inclusion $\operatorname{Sing} q_\xi \subset T_p(f_\xi)$ résulte de [KS, par. 1, proposition 6] d'où le lemme.

(3.3) **Lemme.** *Supposons que C n'est pas bielliptique. Pour tout point générique ξ de W^1_{g-1}, le sous-espace $T_p(q_\xi) \cap T_p(f_\xi)$ est de codimension 2 dans $|K|^*$.*

Démonstration. D'après [KS, par. 1, proposition 5], ou encore d'après (4.7) ci-dessous, il suffit de vérifier les conditions suivantes:

α) $p \notin \operatorname{Sing}(q_\xi)$, i.e. p n'est ni point base de ξ ni point base de ξ'.

β) Ou bien p n'est pas point de ramification de ξ et il existe $t \in C$, $t \notin \operatorname{Sin}(q_\xi)$, tel que $\xi_p = \xi_t$ et $\xi'_p \neq \xi'_t$.

Ou bien p n'est pas point de ramification de ξ' et il existe $t \in C$, $t \notin \operatorname{Sing}(q_\xi)$, tel que $\xi_p \neq \xi_t$ et $\xi'_p = \xi'_t$.

Soit Z une composante de W^1_{g-1}; nous allons vérifier qu'un point assez général ξ de Z satisfait aux deux conditions ci-dessus. Pour la condition α), cela résulte aussitôt des inégalités $\dim(p + W^1_{g-2}) = \dim(K - p - W^1_{g-2}) = \dim W^1_{g-2} \leqq g-5 < \dim(Z)$. Nous allons maintenant considérer la condition β).

(3.4) Supposons d'abord que C n'est ni trigonale, ni isomorphe à une quintique plane lisse. Le modèle canonique de C est alors l'intersection schématique des quadriques q_ξ pour $\xi \in Z$: cela résulte de [Gr] pour $g \geqq 6$ puisqu'alors W^1_{g-1} est irréductible [T], et de la description des composantes de W^1_4 donnée dans [T] pour

$g=5$. On a donc $\bigcap_{\xi\in Z} T_p(q_\xi)=\langle 2p\rangle$. Comme $T_p(q_\xi)=\langle \xi_p+\xi'_p\rangle$, dire que p est point de ramification de ξ ou de ξ' signifie qu'on a $\langle 3p\rangle \subset T_p(q_\xi)$, ce qui n'est pas vérifié pour ξ général dans Z.

Pour ξ général dans Z, ξ et ξ' sont sans point base. Supposons qu'on ait $\xi'_p=\xi'_t$ pour tout point t de C tel que $\xi_p=\xi_t$. Soient $p_1,\dots,p_{g-4}$ des points distincts assez généraux de C. Puisque $\dim Z=g-4$, il existe un élément ξ de Z et des points t_1, t_2 de C tels que $\xi_p=p+\sum_{1\leq i\leq g-4} p_i+t_1+t_2$. On a alors $\xi'_p=p+\sum_{1\leq i\leq g-4} p_i+t'_1+t'_2$ (avec $t'_i\in\{p_1,\dots,p_{g-4},t_1,t_2\}$), et $\xi_p+\xi'_p=2p+2\sum_{1\leq i\leq g-4} p_i+t_1+t_2+t'_1+t'_2$.

Supposons $g\geq 6$; l'hyperplan $\langle \xi_p+\xi'_p\rangle$ est tangent à C en au moins deux points distincts généraux p_1 et p_2 de C, distincts de p. Or l'ensemble des hyperplans possédant cette propriété est de dimension $\leq g-5$: en effet, pour p_1 général dans C, on a $h^0(2p+2p_1)=1$, de sorte que la famille des hyperplans de $|K-2p-2p_1|^*$ dont l'image réciproque dans $|K|^*$ rencontre C en un diviseur de la forme $2p+2p_1+2p_2+\dots$ est de dimension $\leq g-6$. Comme l'application rationnelle $\xi\mapsto \xi_p+\xi'_p$ est à fibres finies, on arrive à une contradiction.

Supposons $g=5$; la condition $\xi_p=\xi_t \Leftrightarrow \xi'_p=\xi'_t$ pour tout $t\in C$ implique

– ou bien $2\xi\equiv K$;

– ou bien $\xi_p=p+2p_1+t_1$, $\xi'_p=p+p_1+2t_1$ ($t_1\in C$); l'image de $\langle \xi_p+\xi'_p\rangle$ par la projection de centre $\langle 2p\rangle$ est une tangente d'inflexion à l'image de C (p_1 étant générique dans C), et il n'y a qu'un nombre fini de telles tangentes.

Dans les deux cas on arrive à $\dim Z=0$, ce qui est contradictoire.

(3.5) Supposons maintenant que la courbe C est trigonale. Nous allons traiter le cas $g\geq 6$ (le cas $g=5$ ne présente pas de difficulté). Posons $X=g^1_3+W_{g-4}$; on a alors $W^1_{g-3}=X\cup(K-X)$. Notons Z la sous-variété de $C^{(g-4)}\times C^{(g-2)}$ formée des couples (D,E) tels que $D+E\equiv K-g^1_3-p$. Comme $h^0(K-g^1_3-p)=g-3$, la projection $Z\to C^{(g-4)}$ est birationnelle, et l'application $(D,E)\mapsto D+E$ de Z dans $|K-g^1_3-p|$ est surjective. D'autre part le système linéaire $|K-g^1_3-p|$ est sans point base; il en résulte que, si $\xi=g^1_3+D$ est un élément général de X, le diviseur $E=\xi'_p-p$ est formé de points distincts, et qui ne sont pas contenus dans D ni dans le diviseur $(g^1_3)_p$. Alors p n'est pas point de ramification de ξ'; pour $t\in E$, on a $t\notin \operatorname{Sing}(q_\xi)$, $\xi_p\neq\xi_t$ et $\xi'_p=\xi'_t$, d'où la condition β).

(3.6) Supposons enfin que C est une quintique plane ($g=6$). Tout élément ξ de W^1_5 s'écrit alors $g^2_5-t'+t$, avec $t,t'\in C$. Soient l,l' deux droites de $\mathbf{P}^2$ passant par p et transverses à C; écrivons $\mathrm{l}\cap C=\{p,p_1,\dots,p_4\}$ et $\mathrm{l}'\cap C'=\{p,p'_1,\dots,p'_4\}$, et posons $\xi=g^2_5-p_4+p'_4$. On a $\xi_p=p+p_1+p_2+p_3+p'_4$, $\xi'_p=p+p'_1+p'_2+p'_3+p_4$, d'où par exemple $\xi_p=\xi_{p_1}$, $\xi'_p\neq\xi'_{p_1}$, de sorte que la condition β) est satisfaite. Cela achève la démonstration du Lemme (3.3).

Considérons maintenant le cas bielliptique.

(3.7) **Lemme.** *Supposons C bielliptique; soit Z une composante de W^1_{g-1}. Alors le sous-espace $T_p(q_\xi)\cap T_p(f_\xi)$ est de codimension 2 dans $|K|^*$ pour ξ assez général dans Z, sauf s'il existe une structure bielliptique $\pi: C\to E$ pour laquelle p est point de ramification de π et $Z=\pi^* W^1_2(E)+W_{g-5}$.*

Démonstration. Observons qu'une telle structure, si elle existe, est unique, car le composé de deux involutions elliptiques est sans point fixe [T]. Rappelons (2.1) que si $g\geq 6$, W^1_{g-1} admet deux composantes irréductibles X_1 et X_2.

a) $g \geqq 6$, $Z = X_2$

Supposons que p est point de ramification de tout élément de X_2. Ceci implique d'abord $p \neq i(p)$ comme en (2.3.1). Ensuite, puisque X_2 est invariant par $\xi \mapsto \xi'$, p doit être point de ramification de ξ' pour tout $\xi \in X_2$; on en déduit

$$\bigcap_{\xi \in X_2} \langle \xi_p + \xi'_p \rangle \supset \langle 4p \rangle .$$

En raisonnant comme en (2.2) on voit que cela entraîne $h^0(4p) = 2$, alors que les conditions $g \geqq 6$ et $p \neq ip$ impliquement $h^0(4p) = 1$, d'où une contradiction.

b) $g \geqq 6$, $i(p) \neq p$, $Z = X_1$

Soit ξ un élément général de X_1. Il est clair que p n'est pas point de ramification de ξ ni de ξ'. On peut écrire $\xi_p = p + ip + t + it + D_{g-5}$, où D_{g-5} est la partie fixe de ξ et t est un point de C, distinct de it ainsi que de p et ip. Si pour tout $s \notin \operatorname{Sing} q_\xi$ la condition $\xi_p = \xi_s$ entraînait $\xi'_p = \xi'_s$, on aurait $\xi'_p = p + ip + t + it + E_{g-5}$ avec $E_{g-5} \in W_{g-5}$, et la quadrique q_ξ serait de rang 3, ce qui n'est pas le cas lorsque ξ est assez général.

c) $g = 5$

Si p est point de ramification de tous les éléments d'une composante Z de W_4^1, les quadriques q_ξ correspondantes contiennent la droite $\langle 2p \rangle$; cela implique l'existence d'un triplet (i, E, π) tel que $i(p) = p$ et $Z = \pi^* W_2^1(E) + W_{g-5}$, ce qui est exclu par hypothèse.

Pour démontrer la condition β) on procède alors comme dans le cas général. C.Q.F.D.

4. Démonstration du théorème B

(4.1) Appelons U l'ouvert de W_{g-1}^1 formé des éléments ξ tels que la quadrique q_ξ soit de rang 4 et le sous-espace $T_p(q_\xi) \cap T_p(f_\xi)$ de codimension 2.

Si la courbe C n'est ni trigonale ni isomorphe à une quintique plane, son modèle canonique est intersection schématique des quadriques q_ξ. La variété $V = V_{\text{inf}}(|2\Theta|_{00})$ est donc égale ensemblistement à C. De plus, pour $p \in C$ et $\xi \in U$, on a

$$T_p(V) \subset \Big(\bigcap_D T_{p,D}\Big) \subset T_p(q_\xi) \cap T_p(f_\xi) = \operatorname{Sing}(q_\xi) \oplus \langle 2p \rangle \quad \text{(lemme 3.2)};$$

Si C n'est pas bielliptique, l'ouvert U est dense dans W_{g-1}^1 (lemme 3.3), et on a $\bigcap_{\xi \in U} T_p(q_\xi) = \langle 2p \rangle$, d'où le Théorème B dans ce cas. Il en est de même si C est bielliptique (lemme 3.4), sauf si C admet une structure bielliptique (i, E, π) telle que $ip = p$. Plaçons-nous dans ce cas. Si $g = 5$, les quadriques q_ξ pour $\xi \in U$ engendrent l'espace des quadriques contenant C, et l'on a encore $\bigcap_{\xi \in U} T_p(q_\xi) = \langle 2p \rangle$. Si $g \geqq 6$, il résulte de la proposition 2.3 que l'intersection des sous-espaces $\operatorname{Sing}(q_\xi) \oplus \langle 2p \rangle$, pour $\xi \in U$, est réduite à $\langle 2p \rangle$, d'où le Théorème B dans ce cas.

(4.2) Supposons désormais que l'on est dans le cas d'une quintique plane ou d'une courbe trigonale ($g \geqq 5$).

(4.2) **Proposition.** *La variété V est lisse de dimension 1 le long de C (autrement dit, C est une composante connexe de V).*

En reprenant les notations de (2.4) et (2.5), on a $\mathrm{Sing}(q_\xi) \oplus \langle 2p \rangle = \langle D_{g-4} + 2p \rangle$ lorsque C est trigonale et $\mathrm{Sing}(q_\xi) \oplus \langle 2p \rangle = \langle t + t' + 2p \rangle$ lorsque C est une quintique plane. En faisant varier D_{g-4} (resp. t et t'), on obtient $\bigcap_{\xi \in U} (\mathrm{Sing}(q_\xi) \oplus \langle 2p \rangle) = \langle 2p \rangle$. La proposition résulte alors du lemme 3.2.

(4.3) **Proposition.** *La variété V est égale (ensemblistement) à l'intersection des cônes osculateurs $q_\xi \cap f_\xi$ pour $\xi \in U$.*

Soit x une point de V. Pour tout $\xi \in U$ et tout $D \in T_0 JC$, on a $(q_\xi)^2(x) = 0 = q_\xi(x) \cdot Df_\xi(x) - f_\xi(x) \cdot Dq_\xi(x)$, d'où $f_\xi(x) \cdot Dq_\xi(x) = 0$. Comme $\bigcap_{\xi \in U} \mathrm{Sing}(q_\xi) = \varnothing$ on a $x \notin \mathrm{Sing}(q_\xi)$ lorsque ξ est assez général; il existe alors D tel que $Dq_\xi(x) \neq 0$. On en déduit $f_\xi(x) = 0$ pour ξ général et donc pour tout ξ.

Appelons S l'intersection des quadriques qui contiennent C.

(4.4) **Proposition.** *Supposons C trigonale de genre $\geqq 5$, ou de genre 4 avec deux g_3^1 distincts. On a alors (schématiquement) $V = C$.*

Soit $s \in V - C$. La surface S est réunion des trisécantes à C engendrées par les éléments du g_3^1. Soit l_s la trisécante qui passe par s. Pour tout $\xi \in U$, la droite l_s rencontre la cubique f_ξ en s et aux trois points de $\mathrm{l}_s \cap C$. donc est contenue dans f_ξ. Par suite on a $\mathrm{l}_s \subset V$, ce qui contredit la lissité de V aux points de $\mathrm{l}_s \cap C$ (proposition 4.2).

(4.5) **Proposition.** *Supposons que C soit une quintique plane (lisse). On a alors (schématiquement) $V = C$.*

La surface S est alors la surface de Veronese, image du plongement $\phi: \mathbf{P}^2 \hookrightarrow \mathbf{P}^5$ défini par le système linéaire $|\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1)|$. La variété V ne contient pas S (proposition 4.2), donc pour ξ général f_ξ ne contient pas S et $\phi^*(f_\xi)$ est une courbe de degrée 6 contenant C, de la forme $\phi^*(f_\xi) = C \cup \mathrm{l}_\xi$, où l_ξ est une droite de $\mathbf{P}^2$. Le lemme suivant implique $\bigcap_{\xi \in U} \mathfrak{I}_\xi = \varnothing$ et donne le résultat souhaité.

(4.6) **Lemme.** *Soient t_1, t_2 des points généraux de C et $\xi = g_5^2 - t_2 + t_1$. Alors l_ξ est la droite de $\mathbf{P}^2$ engendrée par t_1 et t_2.*

Démonstration. Notons d_ξ la droite $\langle t_1, t_2 \rangle$. Il suffit de montrer que la conique $\phi(d_\xi)$ est contenue dans f_ξ, on encore que la multiplicité d'intersection de cette conique avec f_ξ est strictement supérieure à 6. On peut supposer que la droite d_ξ coupe C en 5 points distincs t_1, t_2, p_1, p_2, p_3; les images de ces points par ϕ sont dans $\phi(d_\xi) \cap f_\xi$. On va montrer que $\phi(d_\xi)$ est tangente à f_ξ en $\phi(t_1)$ et en $\phi(t_2)$; cela impliquera que la multiplicité d'intersection de $\phi(d_\xi) \cap f_\xi$ est $\geqq 7$, d'où notre assertion.

Fixons une base $(\omega_1, \ldots, \omega_6)$ de $H^0(C, K)$, d'où un système de coordonnées $(z_1, \ldots, z_6)$ sur JC; soit θ une équation de W_5. Soit $D = \sum_{1 \leqq i \leqq 5} q_i$ un élément de W_5; choisissons des paramètres locaux au voisinage de chacun des q_i. En dérivant l'équation $\theta(D) = 0$ deux fois par rapport à q_i et une fois par rapport à q_j et en évaluant en $D \equiv \xi$, on obtient, quels que soient i, j,

$$(4.7) \qquad \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\partial^3 \theta(\xi)}{\partial z_\alpha \partial z_\beta \partial z_\gamma} \omega_\alpha(q_i)\omega_\beta(q_i)\omega_\gamma(q_j) + \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \theta(\xi)}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \omega'_\alpha(q_i)\omega_\beta(q_j) = 0 .$$

Notons $\tilde{q}_\xi$ la forme bilinéaire associée à q_ξ, et $\tilde{f}_\xi$ la forme trilinéaire associée à f_ξ. On a $2t_1 + p_1 + p_2 + p_3 \in |\xi|$, d'où $\langle 2t_1 + p_1 + p_2 + p_3 \rangle \subset q_\xi$ et $\tilde{q}_\xi(t'_1, p_i) = 0$ pour tout i. On en déduit, d'après la formule ci-dessus, $\tilde{f}_\xi(t_1, t_1, p_i) = 0$ pour tout i, de sorte que l'espace tangent $T_{t_1}(f_\xi)$ contient le plan $\langle p_1 + p_2 + p_3 \rangle$; or celui-ci contient la conique $\phi(\mathrm{I}_\xi)$ et a fortiori la droite tangente à $\phi(\mathrm{I}_\xi)$ en t_1, d'où notre assertion. Cela achève la démonstration de la proposition, et donc du cas a) du Théorème B.

Remarquons que nous avons démontré au passage le résultat suivant (qui n'a bien sûr d'intérêt que dans le cas trigonal ou lorsque la courbe C est une quintique plane):

(4.8) **Corollaire.** *Soit C une courbe non hyperelliptique de genre $\geqq 5$, ou de genre 4 avec deux g^1_3 distincts. La courbe canonique est l'intersection des cônes osculateurs aux points doubles du diviseur Θ.*

(4.9) Il reste à traiter le cas b) du Théorème B. Supposons donc que C est de genre 4 et n'a qu'un seul g^1_3, qui vérifie alors $2g^1_3 \equiv K$.

Soit θ une équation de $W_3 - g^1_3$. Le développement de θ au voisinage de 0 s'écrit $\theta = q + g + \ldots$, avec $\deg(q) = 2$ et $\deg(g) = 4$. La quadrique q est de rang 3 et est l'unique quadrique qui contient C; si s désigne le point singulier de q et D_0 un élément de $T_0(JC)$ correspondant à s, on sait [BD] que $f = D_0 g$ est une cubique irréductible contenant C et que θ^2 et les $\theta \cdot D_0 D\theta - D_0\theta \cdot D\theta$ engendrent l'espace vectoriel $H^0(JC, \mathcal{O}(2\Theta))_{00}$. Les cônes tangents en 0 aux diviseurs de ces sections sont q^2 et $q \cdot Df - f \cdot Dq$, pour $D \in T_0(JC)$. La variété $V = V_{\mathrm{inf}}(|2\Theta|_{00})$ est donc définie dans $\mathbf{P}^3$ par les équations $q^2 = q \cdot Df - f \cdot Dq = 0$ pour tout $D \in T_0(JC)$.

Soit $p \in C$. Comme C est intersection complète de q et f, le sous-espace $T_p(q) \cap T_p(f)$ est de codimension 2. En raisonnant comme dans la démonstration de (3.2), on obtient $T_p(V) = T_p(q) \cap T_p(f) = T_p(C)$, d'où la lissité de V le long de C. D'autre part l'espace tangent en s à la quartique $q \cdot Df - f \cdot Dq$ est Dq [on a $f(s) \neq 0$ puisque $s \notin C$]; comme q est de rang 3, on conclut que s est un point lisse (isolé) de V. Cela achève la démonstration du Théorème B.

(4.10) Dans le cas hyperelliptique, un argument analogue à celui de (2.10) montre que la variété $V_{\mathrm{inf}}(|2\Theta|_{00})$ n'est pas réduite (plus précisément, sa multiplicité au point générique est égale à 2).

Remerciement. Je tiens à remercier A. Beauville qui m'a proposé ce travail, et dont les innombrables conseils et suggestions m'ont permis de le mener à bien.

Bibliographie

[ACGH] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P.A., Harris, J.: Geometry of algebraic curves. Berlin Heidelberg New York: Springer 1985

[AM] Andreotti, A., Mayer, A.: On period relations for Abelian integrals on algebraic curves. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa (3) **21**, 189–238 (1967)

[B1] Beauville, A.: L'approche géométrique du problème de Schottky. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, California, USA (1986)

[B2] Beauville, A.: Le problème de Schottky et la conjecture de Novikov. Exp. 675 du sém. Bourbaki, Astérisque **152–153**, 101–112 (1987)

[B3] Beauville, A.: Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires. Ann. Sci. Ec. Norm. Super. 4ᵉ Série **10**, 309–391 (1977)

[BD] Beauville, A., Debarre, O.: Sur les fonctions thêta du second ordre. Arithmetic of complex manifolds (Lect. Notes Math., vol. 1399, pp. 27–39) Berlin Heidelberg New York: Springer 1989

[D] Donagi, R.: The Schottky problem. Theory of moduli (Lect. Notes Math., vol. 1337, pp. 84–137) Berlin Heidelberg New York: Springer 1988

[GG] van Geemen, B., van der Geer, G.: Kummer varieties and the moduli spaces of abelian varieties. Am. J. Math. **108**, 615–642 (1986)

[Gr] Green, M.L.: Quadrics of rank 4 in the ideal of a canonical curve. Invent. Math. **75**, 85–104 (1984)

[KS] Kempf, G.R., Schreyer, F.-O.: A Torelli theorem for osculating cones to the theta divisor. Compos. Math. **67**, 343–353 (1988)

[T] Teixidor, M.: For which Jacobi varieties is Sing Θ reducible? J. Reine Angew. Math. **354**, 141–149 (1984)

[W] Welters, G.E.: The surface $C-C$ on Jacobi varieties and 2nd order theta functions. Acta Math. **157**, 1–22 (1986)