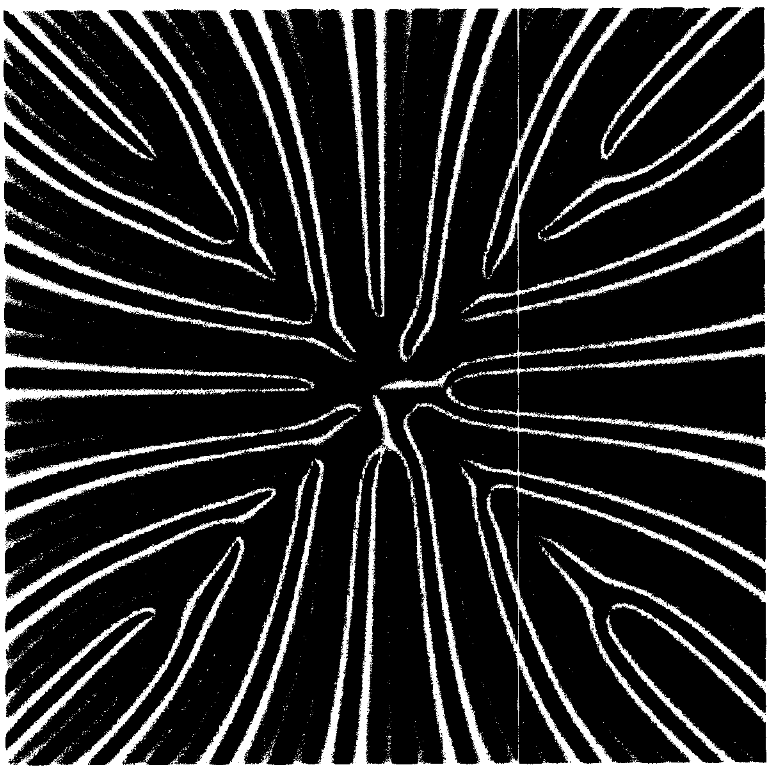
SMAI

MATAPLI

SOCIÉTÉ DE MATHÉMATIQUES
APPLIQUÉES ET INDUSTRIELLES



N° 84 • NOVEMBRE 2007

te pour résoudre ce
:nce nulle impérati-
is dans laquelle les
traédrique et où les
a contrainte qui lui
:ette condition sont

es tridimensionnels
D et cela pour des
par ces deux codes
en fusion pour TE-
TETRAMHD.

est dédié à l'archi-
Il est modelé sur le
r le CCSD (Centre
collaboration avec

nt la pertinence du
itives, comme pour

en 24 heures envi-
uragé !

Thierry Dumont.

: jeunes chercheurs en
istrée MathDoc :

rmulaire d'adhésion :

umé de votre thèse ».

Notes de lecture

par Paul SABLONNIÈRE

MING-JUN LAI ET LARRY L. SCHUMAKER : *Spline functions on triangulations*, collection Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, 600 p., ISBN : 13978-0-521-87592-9

Cambridge University Press vient de publier, dans la série *Encyclopedia of mathematics and its applications* le livre de Ming-Jun Lai, professeur à l'Université de Géorgie et Larry L. Schumaker, professeur à l'Université Vanderbilt, intitulé *Spline functions on triangulations* C'est un travail remarquable, fruit de plus de dix années de recherches et de synthèse bibliographique. Le livre fait environ 600 pages, dont 28 pages de bibliographie et 6 pages d'index. Il est divisé en 18 chapitres : chacun d'eux comporte une ou deux pages de notes historiques fort intéressantes.

La préface fait un petit panorama historique de la recherche sur les fonctions splines, depuis 50 ans environ. Les années 1960-1980 ont été l'âge d'or des splines à une variable. Depuis 1980, on assiste au développement considérable des recherches sur les splines à plusieurs variables. Avant cette date, il y avait quelques résultats sur les produits tensoriels et quelques éléments finis à deux ou trois variables, mais les splines à plusieurs variables avaient relativement peu attiré l'attention. Le livre de Lai et Schumaker a pour but de faire le point sur ces recherches. Les auteurs estiment à environ 1500 le nombre d'articles publiés actuellement sur le sujet. La bibliographie en cite environ 400. Le terme de spline à plusieurs variables désigne ici une fonction composée de morceaux de polynômes définis sur une partition d'une région du plan ou de l'espace (principalement une triangulation d'un domaine plan ou sphérique ou une partition en tétraèdres d'un domaine de l'espace) qui sont joints de telle manière que la fonction globale a un certain degré de régularité. Voici quelques propriétés qui en font des outils efficaces pour les applications :

1) les splines sont faciles à manipuler dans les calculs et l'on dispose d'algorithmes stables et efficaces pour évaluer leurs dérivées et leurs intégrales ;

2) la représentation locale de Bernstein-Bézier des polynômes est un outil pratique fournissant une connexion forte entre la forme d'une spline et ses coefficients dans cette représentation, qu'on appelle *B-coefficients* ;

3) les splines approchent très bien les fonctions régulières et l'on peut établir une relation exacte entre la régularité d'une fonction et son ordre d'approximation

par des splines.
Sans entrer dans les détails des différents chapitres, signalons les chapitres 2 et 3 qui constituent un excellent survol des méthodes de Bernstein-Bézier pour les surfaces définies sur un triangle exprimées en fonction des coordonnées barycentriques du triangle. Le chapitre 5 fait le lien entre la représentation locale et la représentation globale des splines sur une triangulation. Il met en évidence la notion importante d' *ensemble générateur minimal* (« minimal determining set ») de B-coefficients. Ce sont les B-coefficients qui sont nécessaires et suffisants pour construire une spline sur un domaine donné muni d'une triangulation.
Le chapitre 6 sera plus familier aux amateurs de macro-éléments finis, mais relativement peu d'entre eux, je crois, connaissent l'élément fini (abréviation EF) triangulaire C^1 de *Powell et Sabin* (c'est le Powell de l'optimisation) qui est quadratique par morceaux, alors que l'élément fini de Hsieh-Clough-Tocher (HCT), étudié autrefois par un académicien célèbre, est cubique par morceaux. Le prix à payer est le découpage du macro-triangle en 6 micro-triangles (au lieu de 3 pour HCT). Les mêmes amateurs seront donc intéressés par les chapitres suivants traitant des EF de classe C^2, puis C^r pour $r \geq 3$ (j'imagine aisément les réactions des utilisateurs traditionnels d'EF, mais justement il ne s'agit pas ici de résoudre des edp...).
Le chapitre 9 aborde le problème difficile de la *dimension d'un espace de splines* d'une régularité donnée sur un domaine borné du plan muni d'une triangulation. En général, on peut donner des bornes inférieure et supérieure de cette dimension en fonction de certaines caractéristiques géométriques de la triangulation, mais on a rarement une formule exacte, la dimension étant très sensible au déplacement d'un sommet. Je passe les chapitres 10 et 11 plus techniques. Le chapitre 12 est une bonne introduction aux *box-splines* qu'on peut considérer comme une extension naturelle des B-splines produits tensoriels à des triangulations uniformes à 3 ou 4 directions du plan. Il décrit aussi des opérateurs d'approximation associés, qu'on appelle des *quasi-interpolants* (terme dû à de Boor et Fix, 1973) et qui sont faciles à construire et à utiliser dans les applications.
Les amateurs de géophysique ou de climatologie apprécieront les chapitres 13 et 14 consacrés aux *splines sphériques*. Une judicieuse extension de la notion de base de Bernstein aux harmoniques sphériques permet de construire de telles fonctions sur des triangulations de la sphère, comme dans le plan. Enfin, les chapitres 15 à 18 s'attaquent courageusement aux polynômes sur des tétraèdres et aux splines définies sur des partitions en tétraèdres d'une région de l'espace. Il y a là de jolis résultats, en particulier sur des macro-éléments de classe C^r, pour $r = 1, 2$ ou plus, tout à fait réjouissants et qui, je l'espère, inciteront quelques lecteurs à délaisser un peu les paysages plats de la dimension 2 pour se lancer hardiment (je crois que c'est l'adverbe qui convient) à l'assaut de ces EF baignant dans

un espace d
mande à êtr
voilà un ouv
tout laborat
l'espère, de
mation à plu

Plan du livr

1) Polynôme
2) Méthodes
3) B-Patches.
4) Triangulati
5) Méthodes
6) Espaces de
7) Espaces de
8) Espaces de
9) Dimension
10) Degré d'a
11) Ensemble
12) Box-spline
13) Splines sp
14) Degré d'a
15) Polynôme
16) Partitions
17) Splines de
18) Espaces de

J-L. MERRI
Sup, Dunod,

Suivant l'introd
mathématiques
ner au lecteur u
de questions d
grammes.

s les chapitres 2 et
ein-Bézier pour les
rdonnées barycen-
ntation locale et la
en évidence la no-
ermining set ») de
et suffisants pour
gulation.
ents finis, mais re-
ni (abréviation EF)
sation) qui est qua-
ugh-Tocher (HCT),
norceaux. Le prix à
(au lieu de 3 pour
pitres suivants trai-
nt les réactions des
ici de résoudre des

un espace de splines
ni d'une triangula-
érieure de cette di-
es de la triangula-
nt très sensible au
techniques. Le cha-
considérer comme
triangulations uni-
s d'approximation
oor et Fix, 1973) et

nt les chapitres 13
on de la notion de
onstruire de telles
plan. Enfin, les cha-
r des tétraèdres et
gion de l'espace. Il
de classe C^r, pour
eront quelques lec-
our se lancer hardi-
s EF baignant dans

un espace de dimension 3, tout de même assez complexes, dont l'utilisation demande à être développée et simplifiée, tout en faisant ses preuves. En conclusion, voilà un ouvrage d'une grande richesse qui doit faire partie de la bibliothèque de tout laboratoire de mathématiques appliquées et susciter en France, du moins je l'espère, de nombreuses vocations de chercheurs dans le domaine de l'approximation à plusieurs variables.

Plan du livre

1) Polynômes à deux variables.
2) Méthodes de Bernstein-Bézier pour les poynômes à deux variables.
3) B-Patches.
4) Triangulations et quadrangulations.
5) Méthodes de Bernstein-Bézier pour les espaces de splines.
6) Espaces de macro-éléments C^1.
7) Espaces de macro-éléments C^2.
8) Espaces de macro-éléments C^r.
9) Dimensions des espaces de splines.
10) Degré d'approximation dans les espaces de splines.
11) Ensembles générateurs minimaux locaux et stables (de B-coefficients).
12) Box-splines à deux variables.
13) Splines sphériques.
14) Degré d'approximation par des splines sphériques.
15) Polynômes à trois variables.
16) Partitions tétraédrales.
17) Splines de trois variables.
18) Espaces de macro-éléments à trois variables.

Par P. SABLONNIÈRE

J-L. MERRIEN : *Analyse numérique avec Matlab*, collection Collection Sciences Sup, Dunod, 2007, 308 p., ISBN : 978-2-10-050863-1

Suivant l'introduction de l'auteur : *le livre s'adresse aux étudiants de licence de mathématiques appliquées ou en formation d'ingénieur. Son objectif est de donner au lecteur un outil lui permettant de travailler de manière autonome à l'aide de questions détaillées et progressives, et d'une construction pas à pas des programmes.*